Biased GRASP con VNS para el problema de dominación total de grafos ponderados

Anonymous Author(s)
Affiliation
Address
email

Abstract

El problema de dominación total de grafos ponderados consiste en determinar un conjunto de dominación total D en un grafo cuyos vértices y aristas tienen pesos asociados, de forma que se minimice el coste total. Este coste se define como la suma de los pesos de los vértices incluidos en D, los pesos de las aristas del subgrafo inducido por D, y, para cada vértice no seleccionado, el peso mínimo de la conexión con algún vértice de D. Este problema, considerado NP-duro por su dificultad, tiene aplicaciones en redes de comunicación, localización de instalaciones y redes sociales, entre otras. El artículo que aquí se presenta, propone una metodología basada en una búsqueda de vecindades variables (VNS) y en una construcción adaptativa mediante Biased GRASP, lo que permite obtener soluciones de alta calidad en instancias de gran tamaño.

1 Introducción

El estudio de problemas de dominación en grafos está ampliamente abordado en la literatura, siendo fundamentales en el análisis de estructuras de redes y en la optimización combinatoria. El caso del problema de dominación total de grafos ponderados, o su acepción en inglés Weighted Total Domination Problem (WTDP), fue propuesto por Ma et al. (2019), y extiende el clásico problema de dominación total al incorporar pesos en los vértices y aristas, permitiendo modelar situaciones reales como la asignación óptima de dispositivos en redes de comunicación. Debido a la complejidad computacional del problema, los enfoques exactos resultan ineficientes para instancias de gran tamaño, lo que justifica la aplicación de técnicas heurísticas y metaheurísticas para obtener soluciones en tiempos razonables.

En el trabajo publicado en Casado et al. (2025) proponemos un procedimiento metaheurístico basado en la metodología VNS e investigamos diversas estrategias para la construcción de soluciones iniciales de buena calidad. Proponemos dos funciones voraces distintas y un contrustivo voraz aleatorizado sesgado (Biased GRASP, BGC). En el BGC, la probabilidad de seleccionar un elemento se orienta hacia aquellos que, además de ofrecer alta calidad, contribuyen a aumentar la diversidad de la solución. Asimismo, se consideran dos variantes para cada método constructivo: la versión básica, que finaliza al obtener una solución factible, y la versión extendida, que continúa incorporando elementos. En Casado et al. (2025) se realizaron experimentos numéricos, apoyados en pruebas estadísticas, que permitieron identificar las estrategias óptimas y validar las propuestas presentadas.

2 Modelo Matemático

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, donde V es el conjunto de vértices y E el de aristas. Definimos el *vecindario* de un vértice $v \in V$, $N(v)$, como el conjunto de vértices adyacentes a v. El *vecindario*

Submitted to XVI Congreso Español de Metaheuristicas, Algoritmos Evolutivos y Bioinsiprados (MAEB 2025).
Do not distribute.

cerrado de v se denota por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$, y cada arista $e \in E$ conecta dos vértices distintos. Para cualquier subconjunto $S \subset V$, se define $N(S)$ como el conjunto de todos los vértices vecinos a los vértices de S, y $N[S] = N(S) \cup S$. Asimismo, $E(S)$ representa el conjunto de aristas cuyos extremos pertenecen a S, y $G[S]$ es el subgrafo inducido por S.

Un *conjunto dominante* (CD) es un subconjunto $D \subset V$ tal que todo vértice en $V \setminus D$ es adyacente a al menos un vértice en D. Por otra parte, un *conjunto de dominación total* (TDS) es un subconjunto $S \subset V$ en el que cada vértice del grafo, incluidos los que pertenecen a S, tiene al menos un vecino en S (es decir, $N(S) = V$). Para que exista un TDS es necesario que no haya vértices aislados en G.

Consideremos un grafo ponderado tanto en vértices como en aristas, $G = (V, \omega_V, E, \omega_E)$, donde $\omega_V : V \to \mathbb{R}^+$ asigna un peso positivo a cada vértice y $\omega_E : E \to \mathbb{R}^+$ asigna un peso a cada arista. Para simplificar, se usará la notación ω cuando no exista ambigüedad entre ω_V y ω_E. El problema de dominación total ponderada (WTDP) consiste en hallar un TDS S en G que minimice el coste total, definido por la función

$$f(S) := \sum_{u \in S} \omega(u) + \sum_{e \in E(S)} \omega(e) + \sum_{v \in V \setminus S} \min\{\omega(v, u) : u \in N(v) \cap S\}.$$

En otras palabras, se busca que la suma de los pesos de los vértices de S, más la suma de los pesos de las aristas del subgrafo inducido por S, y además la suma del mínimo peso de conexión entre cada vértice no perteneciente a S y su vecino en S, sea la menor posible.

El WTDP se relaciona con diversas aplicaciones reales, como la ubicación de un número limitado de dispositivos en una red de comunicación, de modo que cada sitio esté conectado a un transmisor. Aquí, tanto el coste de instalar un dispositivo como el de establecer la comunicación entre ellos se reflejan en los pesos asignados. Así, el objetivo es identificar el TDS de menor coste en un grafo de doble ponderación, sin imponer restricciones sobre la cardinalidad del conjunto dominante. Este modelo resulta fundamental para reducir los costes operativos en sistemas con altos gastos de comunicación.

3 Metodología y Detalles del Algoritmo

En Casado et al. (2025) proponemos una metaheurística basada en la búsqueda de vecindades variable (VNS). Dado que VNS requiere iniciar la búsqueda a partir de una solución inicial, la cual puede generarse de manera aleatoria o mediante un procedimiento más elaborado, proporcionar un punto de partida prometedor reduce el esfuerzo computacional necesario para alcanzar soluciones de alta calidad. Con ese objetivo, se proponen tres procedimientos constructivos: dos de ellos basados en métodos completamente voraces y un tercero fundamentado en el marco de la metaheurística Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP), en particular, en su versión Biased GRASP, que asigna una probabilidad específica a cada elemento candidato.

La metodología propuesta se estructura en dos fases principales: la construcción de soluciones iniciales y la mejora de estas mediante técnicas de búsqueda local y de vecindades variables. En la fase de construcción se desarrollan tres métodos. El primero, un constructivo voraz basado en la función objetivo, selecciona iterativamente el vértice u que, al ser añadido al conjunto S, minimiza el incremento de la función objetivo, es decir, se busca minimizar $f(S \cup \{u\})$. El segundo método es otro constructivo voraz que evalúa cada candidato a partir de una razón que relaciona el beneficio obtenido en términos de nuevos vértices dominados y el coste de incluir dicho vértice, considerando además las aristas internas que se generan. Finalmente, el tercer método constructivo consiste en un constructivo basado en GRASP sesgado (Biased GRASP, BCG). En esta construcción a cada vértice candidato se le asigna un valor de evaluación mediante una función combinada de calidad y diversidad, expresada como $g_{BCG}(u) = \alpha \cdot D + (1 - \alpha) \cdot Q$, donde Q se relaciona con la función voraz utilizada en el segundo constructivo voraz y D mide la diversidad en función de la frecuencia con la que el vértice ha sido incluido en soluciones previas. La selección se efectúa mediante un mecanismo de ruleta, favoreciendo aquellos candidatos con mayor valor de la función voraz, y el proceso continúa hasta cumplir un criterio de parada que puede permitir la mejora de soluciones factibles mediante la incorporación de nuevos vértices, siempre y cuando la reducción en el coste externo supere el incremento de los costes internos.

La fase de mejora de la solución se basa en una búsqueda local que utiliza operadores de intercambio, donde se reemplaza un vértice $s \in S$ por uno $u \notin S$, con el fin de explorar el vecindario definido por estos intercambios. Se estudiaron diversas variantes de esta búsqueda local, entre las que se encuentra

una búsqueda exhaustiva (ELS), que explora de manera completa el vecindario, la búsqueda predictiva (PLS), que intenta predecir la mejora potencial sin ejecutar el intercambio completo (aunque con un coste computacional elevado), y la búsqueda local reducida (RLS), que limita la exploración solo a aquellos intercambios que garantizan la factibilidad de la solución. La última variante, RLS, demostró un equilibrio adecuado entre eficacia y eficiencia, lo que la hace la opción preferida en la metodología.

El núcleo del enfoque es el algoritmo de Búsqueda de vecindad variable con salto (JVNS de sus siglas en inglés), el cual combina dos estrategias: en primer lugar, una fase de perturbación que introduce cambios aleatorios en la solución actual mediante la eliminación de k vértices y la incorporación de nuevos candidatos, lo que facilita la salida de óptimos locales; y en segundo lugar, la aplicación de la búsqueda local (usando RLS) sobre la solución perturbada para refinarla. Además, se contempla una versión multi-start en la que se generan múltiples soluciones iniciales mediante BGC y se ejecuta JVNS para cada una, de manera que se explora un amplio espectro del espacio de soluciones.

4 Resultados Experimentales

En Casado et al. (2025), en primer lugar se analizaron empíricamente las diversas configuraciones y estrategias de los métodos propuestos para encontrar la mejor configuración del metaheurístico. Comparamos los distintos procedimientos constructivos junto con las variantes de la búsqueda local (ELS, PLS y RLS), además de contrastar un diseño VNS básico con uno de arranque múltiple. Para ello, se utilizaron un subconjunto preliminar de 25 instancias representativas extraídas del conjunto de 180 instancias. Los resultados revelaron que el procedimiento Biased GRASP (BGC), combinado con la búsqueda local basada en el ratio RLS y la configuración del VNS con $k_{max} = 0.3$ y 60 iteraciones), logra obtener soluciones de alta calidad en tiempos de CPU razonables, reduciendo de forma notable la desviación promedio respecto al óptimo. En segundo lugar y con el objetivo de evaluar la eficiencia y eficacia de nuestro algoritmo, lo comparamos la versión completa de nuestro algoritmo JVNS con las formulaciones y el genético del artículo previo, GA1 (Álvarez-Miranda and Sinnl, 2021), utilizando tanto el conjunto de instancias derivadas del estado del arte (MA y NEW) como un nuevo conjunto de instancias más desafiantes, denominado CSM, que abarca grafos de 200 a 500 nodos. Mientras que en las instancias de menor tamaño ambos métodos, GA1 y JVNS, ofrecieron resultados comparables, en las instancias grandes el algoritmo JVNS demostró superar a GA1 tanto en calidad de solución como en tiempo de cómputo. Por ejemplo, en el subconjunto NEW la desviación promedio fue de 0.12% para JVNS frente a 0.20% para GA1, mientras que en el conjunto CSM JVNS mantuvo una desviación mínima ($< 0.00001\%$) y tiempos de procesamiento significativamente inferiores. Estos resultados confirman la escalabilidad y eficacia del enfoque propuesto.

5 Conlusiones

En conclusión, el artículo presenta una metodología robusta y eficiente para abordar el WTDP, combinando técnicas de construcción adaptativa, búsqueda local optimizada y estrategias de perturbación en una estructura de búsqueda de vecindades variables. Los resultados obtenidos no solo aportan una solución competitiva para instancias grandes, sino que también abren la puerta a futuras investigaciones que integren enfoques meteheurísticos, combinando técnicas de optimización matemática y heurísticas avanzadas, para enfrentar problemas de dominación en grafos con aún mayores niveles de complejidad.

References

Álvarez-Miranda, E. and Sinnl, M. (2021). Exact and heuristic algorithms for the weighted total domination problem. *Computers & Operations Research*, 127:105157.

Casado, A., Sánchez-Oro, J., and Martínez-Gavara, A. (2025). Heuristics for the weighted total domination problem. *TOP*, pages 1–42.

Ma, Y., Cai, Q., and Yao, S. (2019). Integer linear programming models for the weighted total domination problem. *Applied Mathematics and Computation*, 358:146–150.