基于低秩表示的鲁棒判别特征子空间学习模型

李 骜*① 刘 鑫① 陈德运① 张英涛② 孙广路①
①(哈尔滨理工大学计算机科学与技术学院 哈尔滨 150080)
②(哈尔滨工业大学计算机科学与技术学院 哈尔滨 150001)

摘 要：特征子空间学习是图像识别及分类任务的关键技术之一，传统的特征子空间学习模型面临两个主要的问题。一方面是如何使样本在投影到特征空间后有效地保持其局部结构和判别性。另一方面是当样本含噪时传统学习模型所发生的失效问题。针对上述两个问题，该文提出一种基于低秩表示(LRR)的判别特征子空间学习模型，该模型的主要贡献包括：通过低秩表示探究样本的局部结构，并利用表示系数作为样本在投影空间的相似性约束，使投影子空间能够更好地保持样本的局部近邻关系；为提高模型的抗噪能力，构造了一种利用低秩重构样本的判别特征学习约束项，同时增强模型的判别性和鲁棒性；设计了一种基于交替优化技术的迭代数值求解方案来保证算法的收敛性。该文在多个视觉数据集上进行分类任务的对比实验，实验结果表明所提算法在分类准确度和鲁棒性方面均优于传统特征学习方法。

关键词：图像分类；子空间学习；特征提取；低秩表示
中图分类号：TN911.73 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2020)05-1223-08
DOI: 10.11999/JEIT190164

Robust Discriminative Feature Subspace Learning Based on Low Rank Representation

LI Ao① LIU Xin① CHEN Deyun① ZHANG Yingtao② SUN Guanglu①
①(*School of Computer Science and Technology, Harbin University of Science and Technology, Harbin* 150080, *China*)
②(*School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001, *China*)

Abstract: Feature subspace learning is a critical technique in image recognition and classification tasks. Conventional feature subspace learning methods include two main problems. One is how to preserve the local structures and discrimination when the samples are projected into the learned subspace. The other hand when the data are corrupted with noise, the conventional learning models usually do not work well. To solve the two problems, a discriminative feature learning method is proposed based on Low Rank Representation (LRR). The novel method includes three main contributions. It explores the local structures among samples via low rank representation, and the representation coefficients are used as the similarity measurement to preserve the local neighborhood existed in the samples; To improve the anti-noise performance, a discriminative learning item is constructed from the recovered samples via low rank representation, which can enhance the discrimination and robustness simultaneously; An iterative numerical scheme is developed with alternating optimization, and the convergence can be guaranteed effectively. Extensive experimental results on several visual datasets demonstrate that the proposed method outperforms conventional feature learning methods on both of accuracy and robustness.

Key words: Image classification; Subspace learning; Feature extraction; Low Rank Representation (LRR)

收稿日期：2019-03-20；改回日期：2019-09-30；网络出版：2020-01-20
*通信作者： 李骜 dargonboy@126.com
基金项目：国家自然科学基金 (61501147)，黑龙江省青年创新人才计划(UNPYSCT-2018203)，黑龙江省自然科学基金优秀青年基金(YQ2019F011)，黑龙江省高等学校基本科研业务专项 (LGYC2018JQ013)，哈尔滨市应用技术研究与开发项目(2017RALX006)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(61501147), The University Nursing Program for Young Scholars with Creative Talents in Heilongjiang Province(UNPYSCT-2018203), The Natural Science Foundation of Heilongjiang Province(YQ2019F011), The Fundamental Research Foundation for University of Heilongjiang Province (LGYC2018JQ013), The Application Research and Development Project of Harbin(2017RALX006)

1 引言

随着人脸识别与图像分类技术的快速发展，特征提取作为影响识别与分类结果的关键技术一直受到研究人员的追捧，已经广泛地应用到了数据挖掘、计算机视觉及模式识别等领域，并取得了显著的效果[1,2]。近来，基于子空间学习的特征提取方法由于其良好的数据驱动特性受到了学者们的广泛关注，其基本思想是利用训练数据构建学习模型来学习满足数据分布特性的特征投影矩阵，可以将原始高维数据投影到低维空间。同时，通过灵活地设计模型的具体形式，该类方法能够达到有效保持数据的局部结构、提高特征判别性能等目的，使投影后的数据可以进一步地突出数据的类内相似性和类间差异性。基于上述的诸多好处，基于子空间学习的判别性特征学习方法广泛地用于图像分类和识别等视觉模式分析任务，成为计算机视觉中一个活跃的研究领域。

现今，许多具有代表性的特征子空间学习方法已经被提出。例如，在有监督特征子空间学习的方法中，线性判别分析(Linear Discriminant Analysis, LDA)是具有代表性的特征空间学习方法之一。LDA通过Fisher线性判别项学习一个投影矩阵，并且在具有判别信息的低维子空间中产生良好的类间特征分离效果[3]。为了进一步提高性能，Cai等人[4]提出局部敏感判别分析(Locality Sensitive Discriminant Analysis, LSDA)，其目的是通过发现数据局部流型结构以实现每个局部区域不同类别的数据点之间的间距最大化。

上述方法尽管取得了一定的成效，但当数据受到噪声干扰时，模型的性能会下降。因此，许多基于表示模型的特征空间学习方法由于其更出色的鲁棒性引起了人们极大的关注。稀疏表示(Sparse Representation, SR)和低秩表示(Low Rank Representation, LRR)是两个代表性的模型。从概率论的角度出发，Cai等人[5]提出了一种基于稀疏表示的分类模型(Probabilistic Collaborative Representation-based Classification, ProCRC)，其中学习到的编码特征很好地定义了属于测试集所有类别的协同子空间的概率。相比SRC，LRR能够充分的考虑样本间的相关性信息和子空间结构，同时在一定程度上具有数据恢复和消除噪声的作用，目前已经在字典学习[6]、迁移学习[7]、域适应[8]和异常值检测[9]等领域有了广泛的应用。文献[10]提出了潜在低秩表示模型(Latent LRR)将特征提取和子空间学习放入统一框架中，利用数据中存在的潜在的结构信息，获得更加鲁棒的特征。为了消除Latent LRR中独立学习两个矩阵不能保证整体的最优化，Fang等人[11]提出了一种近似低秩的有监督特征提取方法(Supervised Feature Extraction method by Approximating the Low-rank Representation, SFE-ALR)，SFE-ALR将Latent LRR中两个矩阵看做一个整体来处理，使二者相互促进获得更好的判别信息。与此同时，Ma等人[12]提出了一种用于稀疏表示的判别性低秩字典学习方法(Discriminative Low Rank Dictionary learning algorithm for Sparse Representation, DLRDSR), DLRDSR将低秩约束和字典学习结合在一起实现稀疏表示，用以解决识别和分类任务。

受到上述研究的启发，本文提出一种基于低秩表示的鲁棒的判别特征子空间学习方法。该方法将低秩约束与特征子空间学习融入同一框架，并将类别标签、低秩表示系数以及重构样本信息作为3种不同的约束项来指导特征子空间的学习，良好地保持数据的局部近邻关系，改善抗噪性能以及增强判别特性，使特征子空间的判别性和鲁棒性得到有效的改善。综上所述，本文的贡献包括以下几个方面：

(1) 将低秩表示和特征子空间学习放入同一目标函数，利用低秩表示系数作为样本的相似性测量构造样本在特征空间的距离约束项。通过迭代的学习表示系数和特征子空间，使这两个变量间相互促进，进一步保持样本在投影空间的局部结构和近邻关系；

(2) 通过低秩表示重构训练样本，设计一种鲁棒的判别特征空间约束项，使得特征子空间的学习能够来自于带有干扰抑制作用的重构样本，提高模型的抗噪声能力。

(3) 提出一种基于交替优化的数值方案，迭代地求解目标函数中的变量，获得问题的收敛解。并在公开的图像数据集上证明了该方法的有效性。

2 方法描述

2.1 基于低秩表示的特征子空间学习模型

2.1.1 样本相关性约束的特征子空间学习

从现有的特征子空间学习模型来看，绝大多数形式的约束项都对特征子空间的学习有促进作用。低秩表示模型自从被提出以来，在子空间学习[13]、子空间聚类[14]和图像处理[15]方向都有广泛的研究，它可以更好地发现样本数据的低维结构组成，并伴有干扰抑制的作用。因此本文设计了一个基于低秩表示和样本相关性的特征子空间约束项。该约束项将低秩表示与特征空间相融合，利用低秩表示模型探究样本的潜在本质结构，并将低秩表示系数作为潜在本质结构的度量约束样本在投影空间的近邻关系，其具体的表达式为

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{E}}\sum_{ij}\boldsymbol{Z}_{ij}\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_j\right\|_2^2+\|\boldsymbol{Z}\|_*+\lambda_1\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}\\&\text{s.t.}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_P,\boldsymbol{Z}_{ij}\geq 0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中$\|\cdot\|_*$表示矩阵核范数，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}^2$为F范数，$\|\cdot\|_{2,1}$表示矩阵的$l_{2,1}$范数，用于包含异常值的数据。$\|\boldsymbol{Z}\|_*+\lambda_1\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}$为低秩表示约束项，其中$\boldsymbol{Z}$为为样本的自表示系数矩阵，$\boldsymbol{X}$为训练样本，$\boldsymbol{E}$为误差矩阵。对表示系数矩阵$\boldsymbol{Z}$进行了低秩约束，可以更容易发现训练样本的潜在本质结构的局部相似性，并同时消除样本数据中的噪声干扰。$\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_j\right\|_2^2$表示两个不同样本投影到特征子空间后样本之间的距离，用于约束其局部近邻程度。

根据式(1)，$\boldsymbol{Z}_{ij}$可用于度量样本$\boldsymbol{X}_i$与$\boldsymbol{X}_j$之间的结构相似性，以保持样本的局部结构。本文对$\boldsymbol{Z}$施加了额外的非负约束，保证距离约束项的非负性。若两个样本相似性越大，$\boldsymbol{Z}_{ij}$越大；反之$\boldsymbol{Z}_{ij}$越小。此外，为了减少数据冗余，这里对投影矩阵$\boldsymbol{P}$还引入了额外的正交约束$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_P$, $\boldsymbol{I}_P$为$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P}$的单位阵。式(1)中模型的投影效果示意图如图1所示。其中，不同颜色的三角形，正方形，圆形分别代表3种不同类别的样本。

2.1.2 低秩表示的鲁棒判别特征空间约束项

为了进一步加强特征子空间的判别性和鲁棒性，本文提出了一种基于低秩重构样本的特征子空间约束项。该约束项首先利用低秩表示系数进行样本重构，其目的是在一定程度上抑制噪声干扰并恢复出纯净原始数据，然后再利用标签信息以有监督的方式约束样本在特征投影空间的距离关系，其约束项的表达式为

$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2-\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{U}_{\mathrm{f}}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&+\eta\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\right\|_{\mathrm{F}}^2\end{aligned}\tag{2}$$

其中$\boldsymbol{Z}$为式(1)中的低秩系数矩阵$\boldsymbol{Z}$，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}^2$为F范数，$\boldsymbol{I}$为$n\times n$的单位阵，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}$和$\boldsymbol{U}_{\mathrm{f}}$是两个常系数矩阵，当$\boldsymbol{X}_i$和$\boldsymbol{X}_j$属于同一类时，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}(i,j)=(1/n_k)$, n_k为第k类的样本数；当$\boldsymbol{X}_i$和$\boldsymbol{X}_j$不属于同一类时，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}(i,j)=0$。无论$\boldsymbol{X}_i$和$\boldsymbol{X}_j$是否属于同一类，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{f}}(i,j)=(1/n)$, n为样本总数。式(2)一方面引入了标签的监督信息，使类内散度矩阵和类间散度矩阵差异化进一步扩大，增强了特征子空间的判别性能。另一方面，通过探索低秩重构数据的结构信息，利用具有干扰抑制作用的重构样本，提高了特征子空间的鲁棒性。因此，式(2)可看做是式(1)中约束项对于判别性和鲁棒性的补充约束，两式相结合，其投影效果示意图如图2所示。

2.1.3 综合鲁棒判别特征子空间学习模型

在上述的两个子空间约束项基础上，为了使特征子空间的学习能够更有效提高对于分类问题的适应性，并保证同类样本能够尽量地聚集于一个具有类别信息和大边缘间隔的聚类中心，本文还引入样本标签回归项。通过将标签回归项与式(1)与式(2)放入同一优化目标函数，提出式(3)的综合判别特征空间学习模型

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{E}}\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&+\sum_{ij}\boldsymbol{Z}_{ij}\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_j\right\|_2^2\\&+\|\boldsymbol{Z}\|_*+\lambda_1\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}\\&+\lambda_2\left(\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}_e\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\right.\\&-\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{U}_e-\boldsymbol{U}_f\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&\left.+\eta\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)\\&\text{s.t.}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_P,\boldsymbol{Z}_{ij}\geq 0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中$\boldsymbol{Y}$是训练样本类别标签，$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_2\cdots\boldsymbol{Y}_n]$, $\boldsymbol{Y}_i=[-1\cdots1\cdots-1]^{\mathrm{T}}\in\Re^j$表示矩阵$\boldsymbol{Y}$的第$i$列，如果第$i$个样本属于第$j$类，则第$i$列中第$j$个元素为1，其余的元素为$-1$。$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2\cdots\boldsymbol{X}_n]$是训练样本，$\boldsymbol{X}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$表示矩阵$\boldsymbol{X}$的第$i$列，$n$表示训练样本总数。$\boldsymbol{P}$表示学习到的特征投影矩阵，$\boldsymbol{Z}$表示系数表示矩阵，$\mathrm{Z}_{ij}$为矩阵$\boldsymbol{Z}$中第$i$行第$j$列的值，参数$\lambda_1$, λ_2和η为正则化参数，用于平衡式中的各项正则化约束。

2.2 目标函数求解

本节设计了一个迭代的数值方案求解目标函数。由于在式(3)中，所有变量联合起来的目标函数最小化问题并不是一个凸问题，因此本文采用非精确增广拉格朗日乘子法(Augmented Lagrangian

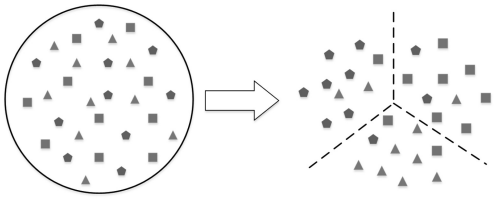


图 1 基于样本局部近邻关系的特征空间投影效果示意图

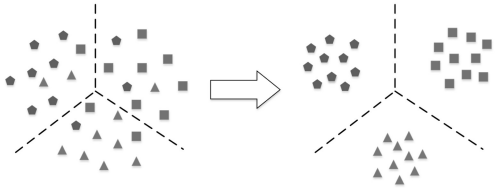


图 2 低秩表示约束的鲁棒特征学习模型的效果示意图

Multiplier, ALM)[16]来进行变量的交替求解。同时，为了更方便求解最小化问题，本文引入辅助变量$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{G}$，拉格朗日乘子$\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$和$\boldsymbol{Y}_3$。通过增广拉格朗日乘数法，得到式(3)的拉格朗日函数形式

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{E},\boldsymbol{G},\boldsymbol{R}} \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}\\&+\sum_{ij}\boldsymbol{R}_{ij}\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_j\right\|_2^2+\|\boldsymbol{G}\|_*+\lambda_1\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}\\&+\lambda_2\left(\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}_e\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2-\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{U}_e-\boldsymbol{U}_f\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\right.\\&\left.+\eta\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)+\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{Y}_1\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}\right)\right)\\&+\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{Y}_2\left(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{G}\right)\right)+\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{Y}_3\left(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{R}\right)\right)\\&+\frac{\mu}{2}\left(\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{G}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{R}\|_{\mathrm{F}}^2\right)\\&\text{s.t. }\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_P,\boldsymbol{R}_{ij}\geq 0\end{aligned}\tag{4}$$

在数值迭代方q案中，利用已提出的ALM方法，在一次迭代中针对每个变量求解相应的子问题。在对其中一个变量求解时，固定其他所有变量。通过这样的方式，在第k次迭代时，消除与$\boldsymbol{P}$无关的项(即除$\boldsymbol{P}$以外的其他变量固定不变)，得到关于投影子空间$\boldsymbol{P}$的如式(5)的子问题，并将其重写为基于图的紧凑形式

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{P}}\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right)\\&\quad+\lambda_2\left(\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}^k\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\right.\\&\quad\left.-\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}^k\left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{U}_{\mathrm{f}}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2+\eta\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}^k\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)\\&\text{s.t.}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_P\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{R}$为图拉普拉斯矩阵，$\boldsymbol{D}$为由$D_{ii}=\dfrac{\sum(\boldsymbol{R})_{*i}+\sum(\boldsymbol{R})_{i*}}{2}$组成的对角矩阵。由于正交约束，最小化问题不是简单的2次问题，可以用文献[17]中提出的基于目标函数导数的数值方法进行求解。

在求解出$\boldsymbol{P}$后，通过固定其他变量，得到有关变量$\boldsymbol{G}$的目标函数，并将其化简为

$$\min_{\boldsymbol{G}}\frac{1}{\mu}\|\boldsymbol{G}\|_*+\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{G}-\left(\boldsymbol{Z}^k+\frac{\boldsymbol{Y}_2^{\,k}}{\mu}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\tag{6}$$

式(6)是经典的秩最小化问题，可以通过文献[18]中奇异值收缩算子有效地求解。

类似地，在删除与$\boldsymbol{R}$无关的项后，得到关于$\boldsymbol{R}$的目标函数。将其化简后为

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{R}}\left\|\boldsymbol{R}-\left(\boldsymbol{Z}^k+\frac{\boldsymbol{Y}_3^{\,k}}{\mu}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2+\sum_{i,j}\left(\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{S}^{k+1}\right)_{ij}\\&\text{s.t.}\boldsymbol{R}_{ij}\geq 0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中$\otimes$表示哈达玛乘积，矩阵$\boldsymbol{S}$中的每一个元素为$\boldsymbol{S}_{ij}=\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}(k+1)}\mathrm{X}_i-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}(k+1)}\mathrm{X}_j\right\|_2^2$表示，$(\cdot)_{ij}$表示样本的$i$行$j$列的元素。由于式(7)中每个元素都是独立进行计算且是非负的，因此式(7)的最小化问题本质上是一个加权l_1范数最小化问题，可利用文献[19]中的方法对其进行求解。

由于$\boldsymbol{G}$和$\boldsymbol{R}$为辅助变量，且通过$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}$对变量进行限制，因此在求解出$\boldsymbol{G}$和$\boldsymbol{R}$后，可以通过固定其余变量，得到关于$\boldsymbol{Z}$的目标函数，并将其化简为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{Z}}\lambda_2\left(\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}(k+1)}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\left(\mathrm{I}-\mathrm{U}_{\mathrm{e}}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\right.\\&\left.-\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}(k+1)}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{U}_{\mathrm{f}}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2+\eta\left\|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}(k+1)}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)\\&+\frac{\mu}{2}\left(\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}^k+\frac{\boldsymbol{Y}_1^{\,k}}{\mu}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\left\|\boldsymbol{Z}\right.\right.\\&\left.\left.-\boldsymbol{G}^{k+1}+\frac{\boldsymbol{Y}_2^{\,k}}{\mu}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\left\|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{R}^{k+1}+\frac{\boldsymbol{Y}_3^{\,k}}{\mu}\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)\end{aligned}\tag{8}$$

式(8)是2次凸最小化问题，令其导数为零，可以求出$\boldsymbol{Z}$的解。

最后，删除与$\boldsymbol{E}$无关的变量，得到有关误差矩阵$\boldsymbol{E}$的目标函数，其化简形式为

$$\min_{\boldsymbol{E}}\frac{\lambda_1}{\mu}\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}+\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{E}-\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}^{k+1}+\frac{\boldsymbol{Y}_1^{\,k}}{\mu}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2\tag{9}$$

通过设$\Theta=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}^{k+1}+\dfrac{\boldsymbol{Y}_1^{\,k}}{\mu}$，式(9)中的最小化问题可以通过文献[20]中的方法获得其闭式解。

根据上面的分析，现将所提出的数值方案总结于算法1。

算法1：综合目标函数的数值求解方案

输入：训练集X，类别标签Y, λ_1, λ_2, η, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}=\boldsymbol{R}=0$, $\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{Y}_3=0$, $\mu=0.6$, $\mu_{\max}=10^{10}$, $\rho=1.1$。

输出：$\boldsymbol{P}$

While not convergence do

1. 使用式(5)—(9)进行更新$\boldsymbol{P}^{k+1}$, $\boldsymbol{G}^{k+1}$, $\boldsymbol{R}^{k+1}$, $\boldsymbol{Z}^{k+1}$, $\boldsymbol{E}^{k+1}$;

2. 更新拉格朗日乘子及参数μ:

$\boldsymbol{Y}_1{}^{k+1}=\boldsymbol{Y}_1{}^{k}+\mu\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}^{k+1}-\boldsymbol{E}^{k+1}\right)$;

$\boldsymbol{Y}_2{}^{k+1}=\boldsymbol{Y}_2{}^{k}+\mu\left(\boldsymbol{Z}^{k+1}-\boldsymbol{G}^{k+1}\right)$;

$\boldsymbol{Y}_3{}^{k+1}=\boldsymbol{Y}_3{}^{k}+\mu\left(\boldsymbol{Z}^{k+1}-\boldsymbol{R}^{k+1}\right)$;

$\mu=\min\left(\mu_{\max},\rho\mu\right)$;

end while

3　实验结果及分析

3.1　数据集

本文使用4个图像数据集对特征子空间学习模型进行性能评估，具体描述如下：

COIL20是一个物体数据集，包含了来自20个对象的1440张图像，每个物体包含的72张图像是以5°的角度连续拍摄的。在实验中，数据集中的所有图像都被裁剪为32×32像素，并从每个物体图像中随机选取10张图像作为训练集，其余图像用作测试集。

ORL是一个人脸数据集，它包含来自在40个人的400张正面人脸图像。每个人包含了不同的照明条件下的10张图片。实验中，每张人脸图像都被裁剪为32×32像素，并从每个人的人脸图像中随机选取5张作为训练集，其余图像作为测试集。

Extended YaleB也是一个人脸数据集，它包含了来自28个人的2414张正面拍摄的人脸图像，每个人都包含了不同光照条件下的大约64张图像。实验中，数据集中的图像被裁剪为32×32像素，并从每个人的人脸图像中随机选取30张作为训练集，其余图像作为测试集。

USPS是一个手写汉字图像数据集，它具有从0到9共9298张手写数字图像。实验中，每张图像被裁剪为16×16像素，并从每个数字中随机选取10张图像作为训练集，其余图像作为测试集。

为了验证提出模型的鲁棒性和抗噪性，本文对4个公开数据集分别加上随机脉冲噪声和随机条纹干扰。

3.2　实验设置

为了验证本文算法的有效性，将所提出的方法与几种现有的特征子空间学习方法进行了比较，对比方法包括LSDA, Latent LRR, DLRDSR, ProCRC和SFE-ALR。模型参数$\lambda_1=\lambda_2=10^{-6}$, $\eta=0.5$, ALM辅助参数μ, ρ的设置如算法所示。实验采用稀疏表示分类器(Sparse Representation Classifier, SRC)来评估对比特征提取方法的性能。所有实验在每个数据集上都重复5次，并计算其平均结果及标准方差。

3.3　实验结果

3.3.1　随机脉冲噪声下的实验结果

对于随机脉冲噪声干扰，可以利用$\|\boldsymbol{E}\|_1$对其进行建模替换式(3)中的$l_{2,1}$范数，最大程度消除噪声干扰。实验分别在原始数据集和含噪数据集上进行，各对比方法的性能随噪声干扰强度变化的关系如图3所示。

从实验结果可以看出，本文方法在原始数据集上均显示出优于其他比较方法的性能。并且与传统的特征子空间学习方法相比，所有基于低秩表示的方法在噪声条件下都显示出了优势。同时，本文方法在不同强度的噪声条件下性能都优于其他比较方法，且当图像中噪声比例较大时其性能更为显著。

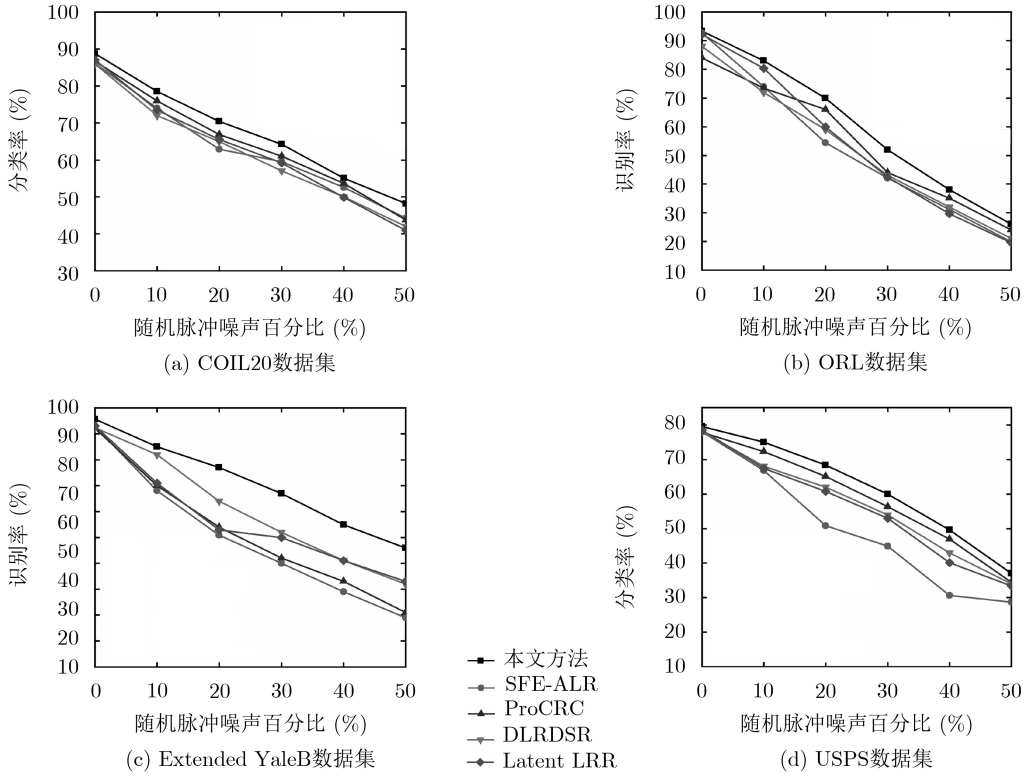


图 3 不同比例的随机脉冲噪声下的识别率曲线

3.3.2 随机条纹干扰下的实验结果

对于随机条纹干扰，可利用$\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}$对其进行建模来有效的抑制干扰，因此特征子空间的学习中直接采用式(3)中残差矩阵$\boldsymbol{E}$的约束形式。相较于随机脉冲噪声，条纹干扰对图像的破坏程度具有一定的局部性，而且由于每幅图像干扰的位置不同，增加了模型提取有效特征的难度，在此条件下我们对模型的鲁棒性进行验证，实验结果如图4所示。

图4表明，在条纹干扰的情况下，本文方法在分类准确率上仍然优于其他对比方法，其主要原因在于模型中包含利用低秩重构样本的特征空间约束项，有效地抑制了训练样本中的干扰信息，增强模型的抗噪性能。此外，从实验结果还可以看出，随着噪声干扰的增强，本文算法相比传统算法的优势更为显著。

3.3.3 不同训练样本数量下的分类准确率

样本训练数量是影响模型性能的因素之一，为了观察不同训练数量对本文特征学习模型的影响，实验中绘制了分类准确率关于训练样本数量的关系曲线。实验使用COIL20作为测试数据集，分别在原始图像及含有20%的条纹干扰的图像上进行分类实验，其分类准确率随训练样本的变化趋势如图5所示。

3.3.4 参数及收敛性分析

本文所提出的特征空间学习模型共包含5个主要参数，其中μ和ρ为ALM引入的辅助参数，可按

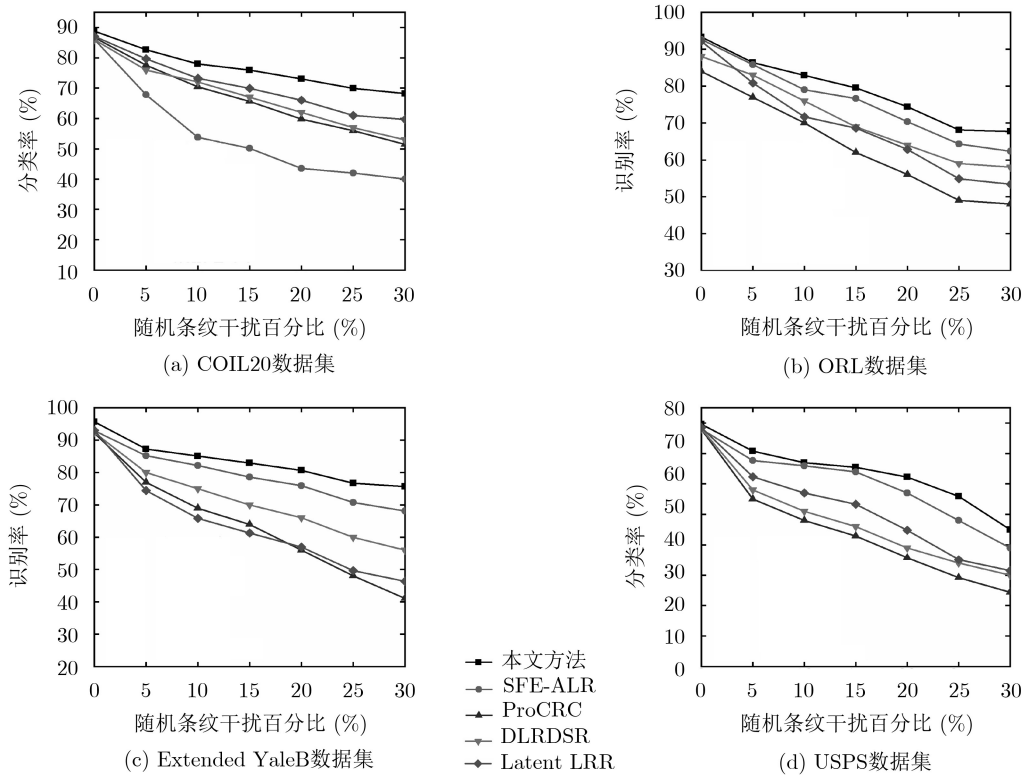


图 4 不同比例的随机条纹干扰下的识别率曲线

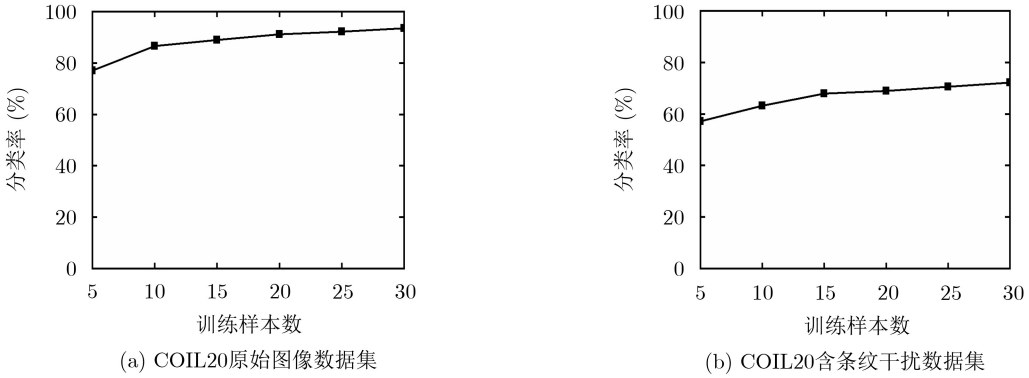
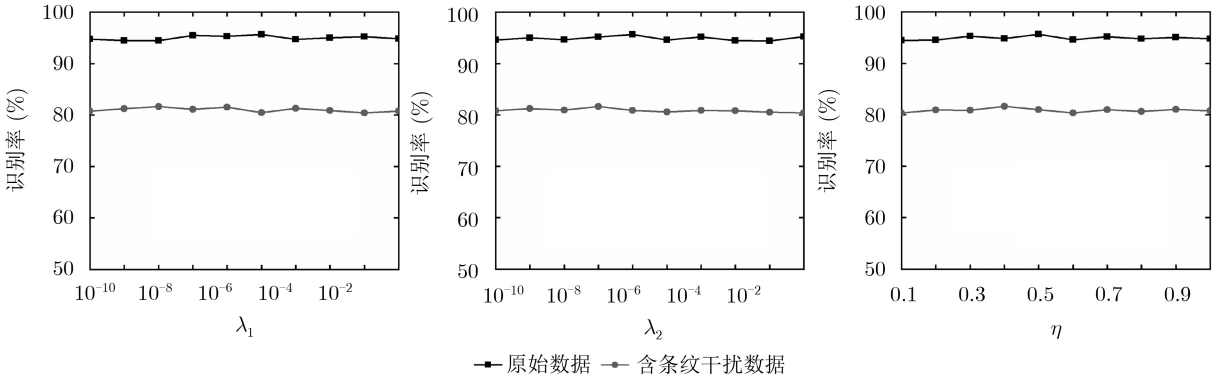


图 5 不同训练样本数量下的识别率曲线

照文献[16]中的建议进行设置以保证目标函数的收敛性。为了观察另外3个参数λ_1, λ_2, η对模型的影响，实验中以Extended YaleB作为测试集来研究这些参数参数变化对分类准确率的影响。实验分别对测试原始图像及含20%条纹干扰的图像进行测试，其分类准确率随参数变化的关系曲线如图6所示。从实验结果中可以看出，模型的性能对不同的参数均不敏感，虽然参数的取值范围较广，但是所获得的实验结果波动非常小。

为了进一步验证目标函数的收敛性，选取Extended YaleB作为测试数据集，绘制目标函数值随迭代次数变化的收敛曲线，如图7所示。可以观察到，本文提出的方法可以快速收敛并保持目标函数值的稳定性。



(a) λ_1与识别率的关系　(b) λ_2与识别率的关系　(c) η与识别率的关系

图 6 参数取值与分类准确率的变化关系曲线

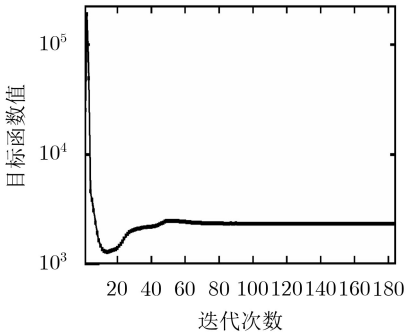


图 7 目标函数值随迭代次数的收敛曲线

4　结束语

本文提出了一种用于图像特征提取的判别性的特征子空间学习方法。该方法将低秩表示和子空间学习融入同一框架。利用低秩表示系数作为样本在投影空间的相似性约束，构造样本在特征空间的距离约束项，使投影子空间能够更好地保持样本的局部近邻关系；利用低秩重构训练样本，设计一种判别性特征空间约束项，提高模型的抗噪声能力；引入基于标签回归的特征空间约束项，有效地增强特征空间的判别性和类间鉴别适应能力。为了解决目标函数对多变量的非凸性问题，还提出了基于ALM的数值迭代方案，有效地解决了目标函数收敛性问题。通过在4个不同类型的公开数据集上进行对比实验，其实验结果表明了本文方法相较于许多现在流行的方法在分类准确率上均有不同程度的提升。此外，当数据处于噪声条件下时，本文方法相比传统方法表现出更好的鲁棒性。在未来的工作中，可以设计出新颖的监督项以进一步提高特征学习模型的性能，同时在本文方法的基础上，还可进一步扩展用于构建半监督或无监督的特征学习模型。

参 考 文 献

[1] 张涛, 唐振民. 一种基于非负低秩稀疏图的半监督学习改进算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(4): 915–921. doi: 10.11999/JEIT160559.
ZHANG Tao and TANG Zhenmin. Improved algorithm based on non-negative low rank and sparse graph for semi-supervised learning[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(4): 915–921. doi: 10.11999/JEIT160559.

[2] 成宝芝, 赵春晖, 张丽丽. 子空间稀疏表示高光谱异常检测新算法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2017, 38(4): 640–645. doi: 10.11990/jheu.201604006.
CHENG Baozhi, ZHAO Chunhui, and ZHANG Lili. An anomaly detection algorithm for hyperspectral images using subspace sparse representation[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2017, 38(4): 640–645. doi: 10.11990/jheu.201604006.

[3] BELHUMEUR P N, HESPANHA J P, and KRIEGMAN D J. Eigenfaces vs. fisherfaces: Recognition using class specific linear projection[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(7): 711–720. doi:

10.1109/34.598228.

[4] CAI Deng, HE Xiaofei, ZHOU Kun, *et al*. Locality sensitive discriminant analysis[C]. The 20th International Joint Conference on Artifical Intelligence, Hyderabad, India, 2007: 708–713.

[5] CAI Sijia, ZHANG Lei, ZUO Wangmeng, *et al*. A probabilistic collaborative representation based approach for pattern classification[C]. 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Las Vegas, USA, 2016: 2950–2959.

[6] REN Jiahuan, ZHANG Zhao, LI Sheng, *et al*. Robust projective low-rank and sparse representation by robust dictionary learning[C]. The 24th International Conference on Pattern Recognition, Beijing, China, 2018: 1851–1856.

[7] RAZZAGHI P, RAZZAGHI P, and ABBASI K. Transfer subspace learning via low-rank and discriminative reconstruction matrix[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2019, 163: 174–185. doi: 10.1016/j.knosys.2018.08.026.

[8] KANG Zhao, PENG Chong, and CHENG Qiang. Kernel-driven similarity learning[J]. *Neurocomputing*, 2017, 267: 210–219. doi: 10.1016/j.neucom.2017.06.005.

[9] LI Sheng, SHAO Ming, and FU Yun. Multi-view low-rank analysis with applications to outlier detection[J]. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, 2018, 12(3): 32–53. doi: 10.1145/3168363.

[10] LIU Guangcan and YAN Shuicheng. Latent low-rank representation for subspace segmentation and feature extraction[C]. 2011 IEEE International Conference on Computer Vision, Barcelona, Spain, 2011: 1615–1622.

[11] FANG Xiaozhao, HAN Na, WU Jigang, *et al*. Approximate low-rank projection learning for feature extraction[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(11): 5228–5241. doi: 10.1109/TNNLS.2018.2796133.

[12] MA Long, WANG Chunheng, XIAO Baihua, *et al*. Sparse representation for face recognition based on discriminative low-rank dictionary learning[C]. 2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Providence, USA, 2012: 2586–2593.

[13] LI Ao, LIU Xin, WANG Yanbing, *et al*. Subspace structural constraint-based discriminative feature learning via nonnegative low rank representation[J]. *PLoS One*, 2019, 14(5): e0215450. doi: 10.1371/journal.pone.0215450.

[14] PENG Chong, KANG Zhao, and CHENG Qiang. Subspace clustering via variance regularized ridge regression[C]. 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Honolulu, USA, 2017: 21–26.

[15] ZHANG He and PATEL V M. Convolutional sparse and low-rank coding-based image decomposition[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2018, 27(5): 2121–2133. doi: 10.1109/TIP.2017.2786469.

[16] LIN Zhouchen, CHEN Minming, and MA Yi. The augmented Lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices[J]. 2010, arXiv: 1009.5055.

[17] WEN Zaiwen and YIN Wotao. A feasible method for optimization with orthogonality constraints[J]. *Mathematical Programming*, 2013, 142(1/2): 397–434. doi: 10.1007/s10107-012-0584-1.

[18] CANDÈS E J, LI Xiaodong, MA Yi, *et al*. Robust principal component analysis?[J]. *Journal of the ACM* (*JACM*), 2011, 58(3): 11–49. doi: 10.1145/1970392.1970395.

[19] YANG Junfeng and ZHANG Yin. Alternating direction algorithms for ℓ_1 -problems in compressive sensing[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, 33(1): 250–278. doi: 10.1137/090777761.

[20] YANG Junfeng, YIN Wotao, ZHANG Yin, *et al*. A fast algorithm for edge-preserving variational multichannel image restoration[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 569–592. doi: 10.1137/080730421.

李 骜：男，1986年生，博士，副教授，研究方向为计算机视觉及其模式识别、机器学习.

刘 鑫：男，1993年生，硕士生，研究方向为机器学习、模式识别.

陈德运：男，1962年生，博士，教授，博士生导师，研究方向为探测与成像技术、模式识别.

张英涛：女，1975年生，博士，副教授，研究方向为人工智能与信息处理.

孙广路：男，1979年生，博士，教授，博士生导师，研究方向为机器学习、网络安全.